МЕХАНИКА
MECHANICS



УДК 531.36 https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-1-14-21

Трехмерная интегральная модель сухого трения для движения прямоугольного корпуса



М. С. Салимов, И. В. Меркурьев
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ» (г. Москва, Российская Федерация)

Введение. Исследуется трехмерная модель сухого трения при взаимодействии прямоугольного тела и горизонтальной шероховатой поверхности. Предполагается, что отрыв корпуса от горизонтальной поверхности отсутствует. Движение тела происходит в условиях комбинированной динамики, когда помимо продольного движения тело участвует в верчении.
Материалы и методы. Предложены дробно-линейные аппроксимации Паде, которые заменили громоздкие аналитические выражения, наиболее точно описывающие движение тел по шероховатым поверхностям. Предложены новые математические модели, описывающие скольжение и верчение тел с прямоугольным основанием.
Результаты исследования. Разработаны и научно обоснованы аналитические выражения главного вектора и момента сил трения для прямоугольных площадок контакта. Разработана модель трения, которая учитывает взаимосвязь между скоростями скольжения и верчения, позволяющая находить решения для зависимостей Паде. После численного решения уравнений движений, получены и построены зависимости скорости скольжения и угловой скорости от времени. Построены графики зависимостей сил трения и их момента от угловой скорости и скорости проскальзывания, которые позволили сравнить интегральную и нормированную модели трения. Результаты сравнения показали хорошее соответствие интегральной модели и модели на основе аппроксимаций Паде.
Обсуждение и заключения. Полученные результаты позволяет учесть динамическую связь компонентов, которая определяет силовое взаимодействие прямоугольного корпуса и горизонтальной поверхности. Эти результаты могут быть использованы в мобильной робототехнической сфере. Анализируемое движение корпуса происходит за счет управления движением материальной точки внутри корпуса. Такие мобильные роботы могут использоваться при решении широкого класса задач: при создании автономных роботов для исследования космического пространства и планет; при диагностике и лечении в части прохождения по сложным структурам вен и артерий; при исследованиях под водой, в местах больших перепадов температур; при подземных работах.

Ключевые слова: сухое трение, прямоугольное тело, твердое тело, динамика, скольжение, верчение, сила трения, аппроксимации Паде.

Для цитирования: Салимов, М. С. Трехмерная интегральная модель сухого трения для движения прямоугольного корпуса / М. С. Салимов, И. В. Меркурьев // Advanced Engineering Research. — 2021. — Т. 21, № 1. — С. 14–21. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-1-14-21



Three-dimensional integral dry friction model for the motion of a rectangular body

M. S. Salimov, I. V. Merkuriev
National Research University "MPEI" (Moscow, Russian Federation)

Introduction. A three-dimensional dry friction model in the interaction of a rectangular body and a horizontal rough surface is considered. It is assumed that there is no separation of the body from the horizontal surface. The body motion occurs under the conditions of combined dynamics when, in addition to the longitudinal movement, the body participates in twisting.

Materials and Methods. Linear fractional Pade approximations are proposed, which replaced the cumbersome analytical expressions that most accurately describe the motion of bodies on rough surfaces. New mathematical models describing sliding and twisting of bodies with a rectangular base are proposed.
Results. Analytical expressions of the principal vector and moment of friction for rectangular contact areas are developed and scientifically established. A friction model that takes into account the relationship between sliding and twisting speeds, which provides finding solutions for Pade dependences, is developed. After numerical solution to the equations of motion, the dependences of the sliding speed and angular velocity on time were obtained and constructed. Graphs of the dependences of the friction forces and their moment on two parameters (angular velocity and slip velocity) were constructed, which enabled to compare the integral and normalized models of friction. The comparison results showed good agreement of the integral model and the model based on Pade approximations.
Discussion and Conclusions. The results obtained provide considering the dynamic coupling of components, which determines the force interaction of a rectangular body and a horizontal surface. These results can be used in mobile robotics. The analyzed motion of the body occurs through the motion control of a material point inside the body. Such mobile robots can be used when solving a wide class of problems: when creating autonomous robots for the exploration of outer space and planets; in the diagnosis and treatment in case of passing through complex structures of veins and arteries; in research under water, in places of large differential temperature; in underground operations.

Keywords: dry friction, rectangular body, solid body, dynamics, sliding, twisting, friction force, Pade approximations.

For citation: M. S. Salimov, I. V. Merkuriev. Three-dimensional integral dry friction model for the motion of a rectangular body. Advanced Engineering Research, 2021, vol. 21, no. 1. — p. 14–21. https://doi.org/10.23947/2687-1653-2021-21-1-14-21

Введение. Исследование движения прямоугольного корпуса является актуальной задачей в мобильной робототехнической сфере [1]. Это движение происходит за счет управления материальной точкой внутри корпуса. Такие мобильные роботы могут использоваться при решении задач широкого класса. Например, при создании автономных роботов для исследования космического пространства и планет. В медицинских целях для диагностики и лечения, например, при прохождении по сложным структурам вен и артерий. А также при подземных работах и проведении исследований в тяжелых условиях, например, под водой и в местах больших перепадов температур [1, 2].

Таким образом, всё новые задачи ставятся перед робототехникой, для решения которых требуются теоретические исследования, в т. ч. исследование моделей трения между корпусом и поверхностью в условиях комбинированной динамики [3, 4]. Так как движение мобильного робота происходит в разных направлениях, необходимо учитывать продольное движение и верчение. Таким образом, в структуре модели трения нужно обеспечить взаимосвязь между скоростями скольжения и верчения [5]. Важное развитие в описании данной взаимосвязи было сделано в работе [6]. Её автору удалось разрешить уравнения для главного момента и вектора сил трения, где в качестве площадки контакта рассматривался прямоугольник. Такие аналитические выражения позволяют наиболее точно описывать движение тел по шероховатым поверхностям, но они являются громоздкими и сложными, так как содержат в себе интегральные выражения. Поэтому авторы работы [7] построили дробно-линейные аппроксимации Паде, которые позволили находить решения для получаемых зависимостей.

С помощью аппроксимации Паде можно объяснять действия комбинированного сухого трения для линейных и угловых скоростей. На основе приближений Паде появилась возможность создавать новые модели трения [8, 9], которые впоследствии начали классифицировать для лучшей интерпретации [10]. Классификация происходит в зависимости от числа параметров. Так, в работе [11] авторы ввели понятия размерности и порядка модели сухого трения в зависимости от порядка используемых Паде-аппроксимаций.

Модель трения скольжения и верчения, которая предлагается в статье [12] дает возможность учитывать динамическую связь компонентов, которые определяют силовое взаимодействие прямоугольного корпуса и горизонтальной поверхности [13].

Постановка задачи. Рассматривается твердое тело массой m_0, которое представляет собой прямоугольный корпус с однородными гранями длиной a, шириной b и высотой $2h$. Вводится неподвижная система координат $Oxyz$, связанная с корпусом (рис 1). Точка O находится на горизонтальной плоскости. Система $O_1x_1y_1z_1$ имеет начало в точке O_1, которая соответствует геометрическому центру корпуса. Ось O_1z_1

параллельна оси Oz. Ось O_1x_1 параллельна длинному ребру корпуса. Введем единичные векторы e_x, e_y осей O_1y_1 и O_1x_1 соответственно.

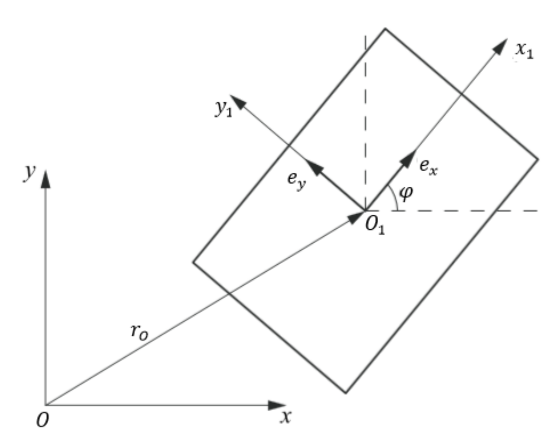


Рис. 1. Системы координат

Рассмотрим безотрывное движение корпуса по поверхности (рис. 2), которое состоит из поступательного перемещения и вращения относительно оси O_1z_1. Три координаты определяют положение корпуса. Координаты x_0, y_0 и h задают начало системы координат $O_1x_1y_1z_1$ в координатах $Oxyz$. Поворот корпуса относительно его исходного положения по оси O_1x_1 задается углом φ. В настоящей статье рассматривается случай, когда центр масс корпуса G и центр масс системы O_1 совпадают (рис. 2) [14].

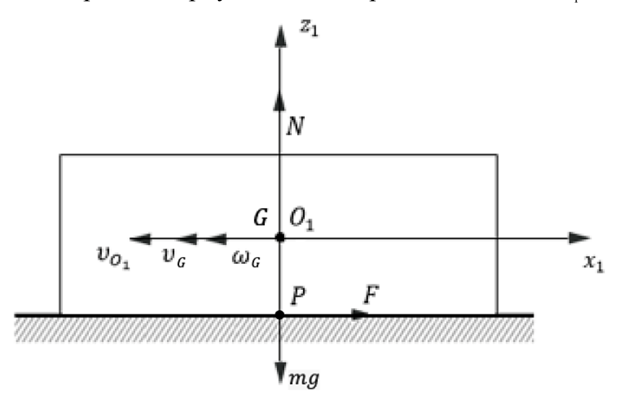


Рис. 2. Движение корпуса системы

Материалы и методы. Область контакта представляет собой прямоугольник со сторонами a и b, в котором нормальное напряжение зависит от расстояния от точки P до граней прямоугольника (рис. 3).

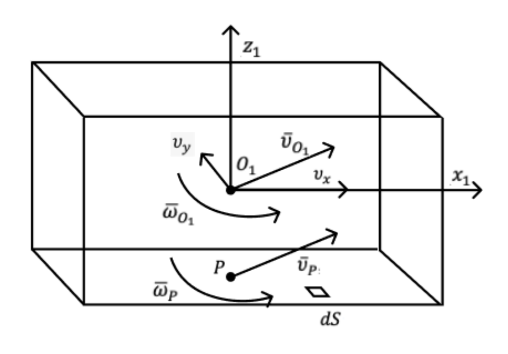


Рис. 3. Скорости точек O_1 и P

Рассмотрим бесконечно малую площадь dS в произвольно выбранной точке M на поверхности контакта. Введем угол φ между относительной скоростью скольжения и осью O_1x_1. Проведем радиус-вектор $\overline{r}_{MP}$ из точки P к точке M. Вектор скорости точки M обозначим υ_M, для его нахождения используем формулу Эйлера, описывающую распределение скоростей в абсолютно твердом теле:

$$\upsilon_M = \upsilon_P + \omega \cdot \bar{r}_{MP}.$$

Скорость скольжения в точке M раскладывается на две составляющие вдоль осей O_1x_1 и O_1y_1:

$$\upsilon_{Mx} = \upsilon_x - y\omega;$$

$$\upsilon_{My} = \upsilon_y + x\omega.$$

Используя закон Кулона, найдем малое приращение силы трения, направленной против относительной скорости в точке M [15]:

$$d\bar{F} = -f\sigma(x,y)\frac{\upsilon_M}{|\upsilon_M|}dS,$$

где f — коэффициент трения; $\sigma(x,y)$ — функция распределения контактных напряжений, зависящая от координат x и y; $dS = dxdy$ — малое приращение площади [15].

Перепишем дифференциал силы трения и момент этой силы в проекциях на рассматриваемые оси:

$$dF_x = -f\sigma(x,y)\frac{\upsilon_{Mx}}{|\upsilon_M|}dxdy;$$

$$dF_y = -f\sigma(x,y)\frac{\upsilon_{My}}{|\upsilon_M|}dxdy;$$

$$dM_z = \begin{bmatrix} i & j & k \\ x & y & 0 \\ dF_x & dF_y & 0 \end{bmatrix} = xdF_y - ydF_x.$$

В качестве частного случая рассмотрим равномерное распределение напряжения при отсутствии внутренних масс в корпусе, тогда эти напряжения будут равны: $\sigma = \frac{m_0 g}{ab}$, но далее запись продолжим в общем виде: $\sigma(x,y)$.

Проинтегрировав выражения для сил трения, получим:

$$F_x = -f\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\sigma(x,y)\frac{\upsilon_x - y\omega}{|\upsilon_M|}dxdy; \quad (1)$$

$$F_y = -f\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\sigma(x,y)\frac{\upsilon_y + x\omega}{|\upsilon_M|}dxdy. \quad (2)$$

Модуль относительного скольжения $|\upsilon_M|$ вычисляется по формуле:

$$|\upsilon_M| = \sqrt{\upsilon_{Mx}^2 + \upsilon_{My}^2} = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \omega^2(x^2 + y^2) + 2\omega(\upsilon_y x - \upsilon_x y)}. \quad (3)$$

Представим взаиморасположение векторов переменной скорости скольжения υ и составляющих силы трения: $F_\parallel$ — составляющая, направленная в противоположном направлении относительно скорости скольжения υ; $F_\perp$ — составляющая, перпендикулярная мгновенной скорости проскальзывания. Одновременно представим координацию этой системы относительно осей O_1x_1 и O_1y_1 (рис. 4).

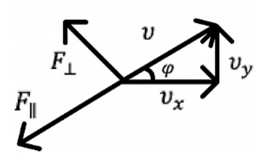


Рис. 4. Составляющие силы трения и скорости

Осуществим переход от проекций скорости скольжения:

$$\begin{cases} \upsilon_x = \upsilon\cos\varphi, \\ \upsilon_y = \upsilon\sin\varphi, \end{cases} \quad (4)$$

к модулю скорости и углу скольжения:

$$\begin{cases} F_\parallel = F_x\cos\varphi + F_y\sin\varphi, \\ F_\perp = F_x(-\sin\varphi) + F_y\sin\varphi^{\cdot} \end{cases} \quad (5)$$

Проинтегрируем момент силы трения на площадке контакта:

$$M_z = -f\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\sigma(x,y)\frac{\upsilon(x\sin\varphi - y\cos\varphi) + \omega(x^2 + y^2)}{\sqrt{\upsilon^2 + \omega^2(x^2 + y^2) + 2\omega\upsilon(x\sin\varphi - y\cos\varphi)}}dxdy.$$

Подставим в систему (5) выражения (1)–(3), а также перепишем выражение для момента силы. В результате получим трехмерную модель трения скольжения и верчения:

$$F_\parallel = -f\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\sigma(x,y)\cdot\frac{\upsilon(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) - \omega(y\cos\varphi + x\sin\varphi)}{\sqrt{\upsilon^2 + \omega^2(x^2 + y^2) + 2\omega\upsilon(x\sin\varphi - y\cos\varphi)}}dxdy; \quad (6)$$

$$F_{\perp}=-f\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\sigma(x,y)\cdot\frac{\omega(y\sin\varphi+x\cos\varphi)}{\sqrt{\upsilon^2+\omega^2(x^2+y^2)+2\omega\upsilon(x\sin\varphi-y\cos\varphi)}}dxdy; \quad (7)$$

$$M_z=-f\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\sigma(x,y)\cdot\frac{\upsilon(x\sin\varphi-y\cos\varphi)+\omega(x^2+y^2)}{\sqrt{\upsilon^2+\omega^2(x^2+y^2)+2\omega\upsilon(x\sin\varphi-y\cos\varphi)}}dxdy. \quad (8)$$

Для того, чтобы не решать громоздкие интегралы, используют замену соответствующими разложениями Паде [16, 17]. Таким образом, исходя из теории Паде [18], эти выражения могут формулироваться как отношение двух функций нескольких переменных во всей области определения при условии, что функции должны иметь одинаковый порядок [7]. Для определения этих функций необходимо определить поведение интегральных выражений (6)–(8) при следующих условиях:

$$\frac{\partial F_{\parallel}}{\partial\upsilon}_{|\upsilon=0}=-\frac{f}{\omega}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\sigma(x,y)\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)+(y\cos\varphi+x\sin\varphi)(x\sin\varphi-y\cos\varphi)}{(x^2+y^2)^2}dxdy=-\frac{f}{\omega}I_0;$$

$$\frac{\partial M_z}{\partial\upsilon}_{|\upsilon=0}=-\frac{f}{\omega}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\sigma(x,y)\cdot\frac{(2y^2x\sin\varphi-2y^3\cos\varphi)}{(x^2+y^2)^2}dxdy=-\frac{f}{\omega}I_3;$$

$$M_{z|\omega\to\infty}=-f\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\sigma(x,y)\cdot\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=-fI_6;$$

$$F_{\perp|\omega\to\infty}=-f\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2}\sigma(x,y)\cdot\frac{y\sin\varphi+x\cos\varphi}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy=fI_9;$$

$$\frac{\partial F_{\parallel}}{\partial\upsilon}_{|\omega=0}=\frac{\partial F_{\parallel}}{\partial\omega}_{|\upsilon=0}=\frac{\partial F_{\parallel}}{\partial\omega}_{|\omega=0}=F_{\parallel|\omega\to\infty}=\frac{\partial F_{\perp}}{\partial\upsilon}_{|\omega=0}=\frac{\partial F_{\perp}}{\partial\omega}_{|\upsilon=0}=$$
$$=F_{\perp|\upsilon\to\infty}=\frac{\partial F_{\perp}}{\partial\omega}_{|\omega=0}=\frac{\partial M_z}{\partial\upsilon}_{|\omega=0}=\frac{\partial M_z}{\partial\omega}_{|\upsilon=0}=M_{z|\upsilon\to\infty}=0.$$

Значения выражений $\frac{\partial F_{\perp}}{\partial\upsilon}_{|\upsilon=0}$ и $\frac{\partial M_z}{\partial\omega}_{|\omega=0}$ не участвуют в нахождении последующих аппроксимаций Паде, поэтому их написание опущено в силу громоздкости. Тождественное равенство нулю реализуется при условии, когда напряжение σ симметрично относительно центра прямоугольного пятна контакта, т. е. точки P.

Точная трехмерная интегральная модель [13] (6)–(8) дает логичное описание явлений сухого трения, однако для решения задач динамики такая модель является сложно-приемлемой в силу необходимости вычисления внушительных интегралов [10]. Во избежание этой процедуры используется [6] замена точной интегральной системы на соответствующие выражения с помощью аппроксимаций Паде во всей области изменения переменных. Дробно-линейные разложения Паде дают трехмерную модель трения скольжения и верчения первого порядка [19]:

$$F_{\parallel}=F_0\frac{\upsilon+b_1\omega}{\upsilon+d_1\omega}; \quad (9)$$
$$M_z=M_0\frac{\omega+b_2\upsilon}{\omega+d_2\upsilon}; \quad (10)$$
$$F_{\perp}=F_0\frac{\omega+b_3\upsilon}{\omega+d_3\upsilon}. \quad (11)$$

Для определения коэффициентов Паде необходимо изучить свойства этой модели в граничных точках по аналогии с интегральными выражениями. Для этого продифференцируем параметры $F_{\parallel}$, $F_{\perp}$, M_z и тем самым удовлетворим соответствующим интегральным выражениям:

$$\begin{cases} F_{\parallel}=-fI_1\dfrac{\upsilon}{\upsilon+\dfrac{I_0}{I_1}\omega} \\ M_z=-fI_6 \\ F_{\perp}=-fI_9\dfrac{\omega}{\omega+\dfrac{I_3}{I_9}\upsilon}\end{cases}.$$

Система уравнений движения имеет вид:

$$J\frac{d\omega_{O_1}}{dt}=M_z;$$
$$(m_0+m_1)\frac{d\upsilon_x}{dt}=F_x+(m_0+m_1)\upsilon_y\omega_{O_1}; \quad (12)$$
$$(m_0+m_1)\frac{d\upsilon_y}{dt}=F_y-(m_0+m_1)\upsilon_x\omega_{O_1}.$$

Выразим производные по времени от скорости скольжения и угловой скорости с помощью формул (3)–(5):

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}}\left(2\upsilon_x \frac{d\upsilon_x}{dt} + 2\upsilon_y \frac{d\upsilon_y}{dt}\right);$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{m_0 + m_1}\left(-\frac{\upsilon \sin\varphi}{\upsilon^2} F_x + \frac{\upsilon \cos\varphi}{\upsilon^2} F_y\right).$$

Перепишем эти уравнения с помощью формул (3)–(5) при $\omega_{O_1} = \omega/a$ и добавим первое уравнение из системы (12):

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_z a;$$
$$(m_0 + m_1)\frac{d\upsilon}{dt} = F_{\parallel}; \qquad (13)$$
$$(m_0 + m_1)\upsilon\dot{\varphi} = F_{\perp}.$$

Результаты исследования. Далее вычислим интегральные выражения параметров I_0, I_1, I_3, I_6, I_9 с помощью программного комплекса Wolfram Mathematica при следующих значениях:

$$f = 1;\ a = 0{,}5\text{ м};\ b = 0{,}2\text{ м};\ m_0 = 1\text{ кг},\qquad \sigma = {}^{m_0 g}/_{ab} = 87\ {}^{\text{кг}}/_{\text{с}^2\text{м}}$$

и подставим в систему уравнений (13). На основе численных выражений построим графики интегральных и нормированных функций, зависимых от параметра $k = {}^{\upsilon}/_{\omega}$. На рис. 5 приведены графики функций интегральных моделей трения (11)–(13), а также моделей на основе аппроксимаций Паде (14)–(16).

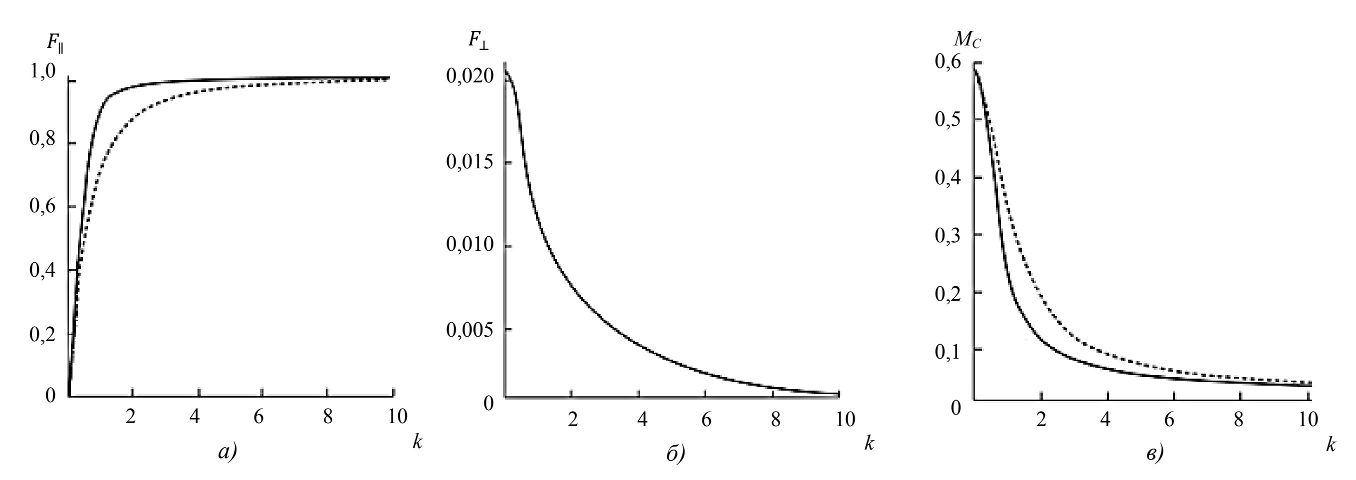


Рис. 5. Графики интегральных (сплошные линии) и нормированных (пунктирные линии) функций касательной (*а*), нормальной (*б*) составляющих силы трения и момента трения (*в*)

Исходя из графиков функций (рис. 5), можно говорить о хорошем соответствии рассмотренных моделей. Далее получим графики зависимостей характерных параметров от времени (рис. 6).

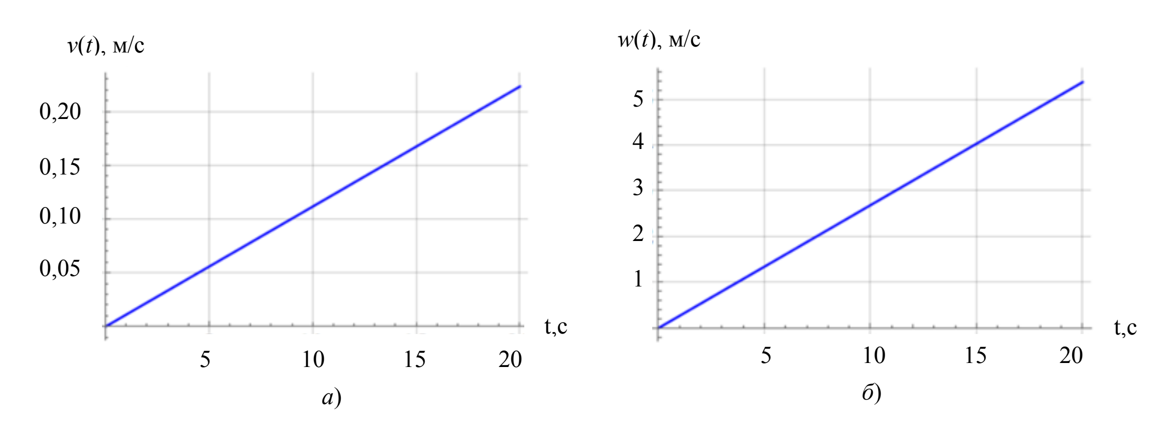


Рис. 6. Зависимости скорости скольжения v (*а*) и угловой скорости *w*(*б*) от времени *t*

Обсуждение и заключения. Выполнено описание движения мобильного робота, начиная с контакта его корпуса и опорной плоскости, в условиях комбинированной динамики, когда присутствует скольжение и верчение. Получены аналитические интегральные выражения для касательной и нормальной составляющих силы трения [19] и момента трения применительно к прямоугольной площадке контакта. Для полученных выражений определены соответствующие аппроксимации Паде. Проведено сравнение интегральной и

нормированной моделей посредством построения графиков зависимостей сил трения и момента трения от угловой скорости и скорости проскальзывания. Результаты сравнения показали хорошее соответствие интегральной модели и модели на основе разложений Паде. Графики соответствуют логичному поведению при движении прямоугольного корпуса, т. к. скорость скольжения и угловая скорость увеличиваются соответственно заданным параметрам. Следовательно, комбинированная модель трения, реализованная с помощью аппроксимаций Паде, может быть применена для решения задач, связанных с мобильными подвижными роботами с прямоугольным основанием.

Библиографический список

1. Салимов, М. С. Движение тела на вибрирующей поверхности в случае сухого трения / М. С. Салимов, Н. С. Рамзин // Проблемы машиностроения и автоматизации. — 2019. — № 4. — С 100–104.

2. Munitsyn, L. V. Vibrations of a Rigid Body with Cylindrical Surface on a Vibrating Foundation / L. V. Munitsyn // Mech. Solids. — 2017. — Vol. 52, no. 6. — P. 675–685.

3. Voldrich, J. Modelling of the three-dimensional friction contact of vibrating elastic bodies with rough surfaces / J. Voldrich // Appl. Comput. Mech. — 2009. — Vol. 3, no. 1. — P. 241–252.

4. Chowdhury, M. A. Sliding friction of steel combinations / M. A. Chowdhury [et al.] // Open Mech. Eng. J. — 2014. — Vol. 8, no. 1. — P. 364–369.

5. Martinovs, A., Gonca, V. Descriptive model of sliding friction processes / A. Martinovs, V. Gonca // Vide. Tehnologija. Resursi. — Environment. Technology. Resources. — 2009. — Vol. 2. — P. 227–233.

6. Журавлёв, В. Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел / В. Ф. Журавлёв // Прикладная математика и механика. — 1998. — Т. 62, № 5. — С. 762–767.

7. Андронов, В. В. Сухое трение в задачах механики / В. В. Андронов, В. Ф. Журавлёв. — Москва. Ижевск : R&C Dynamics, 2010. — 184 с.

8. Acary, V., Brémond, M., Huber, O. On solving contact problems with coulomb friction: Formulations and numerical comparisons / V. Acary, M. Brémond, O. Huber // In: Transactions of the European Network for Nonsmooth Dynamics on Advanced Topics in Nonsmooth Dynamics. Springer International Publishing, 2018. — P. 375–457.

9. Haslinger, J., Kučera, R., Sassi, T. A domain decomposition algorithm for contact problems with Coulomb's friction / J. Haslinger, R. Kučera, T. Sassi // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. — 2014. — Vol. 98. — P. 889–897.

10. Киреенков, А. А. Связанная модель трения скольжения и верчения / А. А. Киреенков // Доклады Академии наук. — 2011. — Т. 441, № 6. — С. 750–755.

11. Журавлёв, В. Ф. О разложениях Паде в задаче о двумерном кулоновом трении / В. Ф. Журавлёв, А. А. Киреенков. // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2005. — № 2. — С. 3–13.

12. Santos, A. P. Granular packings with sliding, rolling, and twisting friction / A. P. Santos [et al.] // Phys. Rev. E. — 2020. — Vol. 102, iss. 3. — P. 032903.

13. Киреенков, А. А. Трехмерные модели трения / А. А. Киреенков // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. — 2011. — Т. 4, № 2. — С. 174–176.

14. Сахаров, А. В. Поворот тела без внешних движителей при помощи ротора / А. В. Сахаров // Труды Московского физико-технического института. — 2014. — Т. 6, № 2. — С. 80–91.

15. Журавлёв, В. Ф. Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения / В. Ф. Журавлёв // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2003. — № 4. — С. 81–89.

16. Киреенков, А. А. Закон Кулона в обобщенной дифференциальной форме в задачах динамики твердых тел с комбинированной кинематикой / А. А. Киреенков // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела — 2010. — № 2. — С. 15–26.

17. Gluzman, S., Yukalov, V. I. Self-similarly corrected Pade approximants for nonlinear equations / S. Gluzman, V. I. Yukalov // Int. J. Mod. Phys. B. — 2020. — Vol. 33, no. 29. — P. 1–23.

18. Baker G. A., Graves-Morris, P. Pade approximations / G. A. Baker, P. Graves-Morris // Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Series no. 59, 2nd ed. — Cambridge University Press, 1996. — 764 p.

19. Киреенков, А. А. Связанная модель трения скольжения и качения в динамике тел на шероховатой плоскости / А. А. Киреенков // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. — 2008. — № 3. — С. 116–131.

Поступила в редакцию 16.11.2020
Запланирована в номер 04.02.2021

Об авторах:

Салимов Максим Сергеевич, аспирант кафедры «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин» ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ», (111250, РФ, г. Москва, ул. Красноказарменная 14), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6109-1362, SalimovMS@mpei.ru

Меркурьев Игорь Владимирович, заведующий кафедрой «Робототехника, мехатроника, динамика и прочность машин» ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ», (111250, РФ, г. Москва, ул. Красноказарменная 14), доктор технических наук, доцент, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7682-2228, MerkuryevIV@mpei.ru

Заявленный вклад соавторов:

М. С. Салимов — формирование основной концепции, цели и задачи исследования, проведение расчетов, подготовка текста, формирование выводов. И. В. Меркурьев — научное руководство, анализ результатов исследований, доработка текста, корректировка выводов.

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.